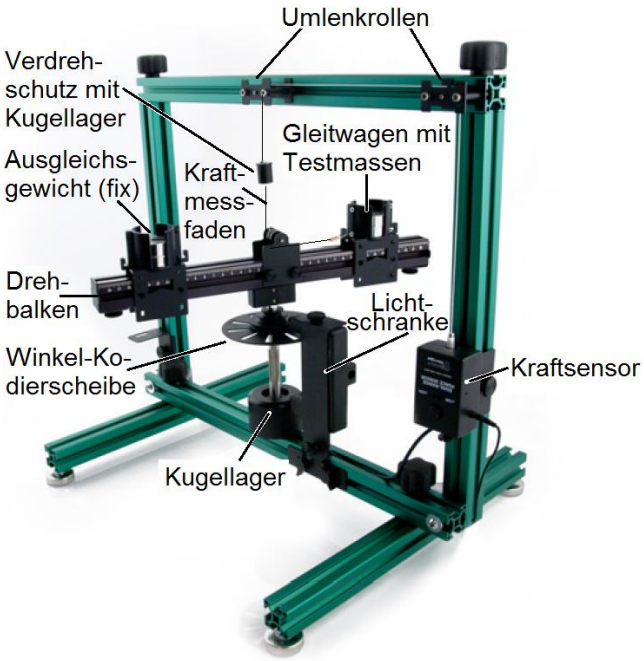
Eine stabile Messapparatur für die Rotationsdynamik

Hans Kammer, hanskammer@bluewin.ch

1. Aufbau und Funktion

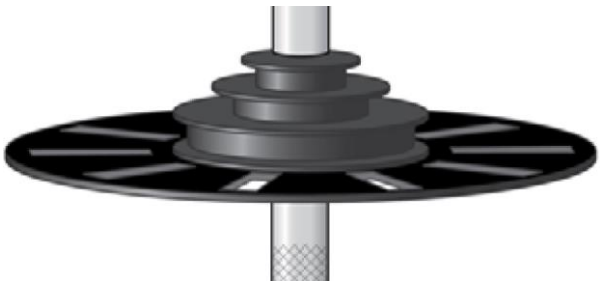


Figur 1 Zentripetalkraftapparat cfa von Vernier

Die amerikanische Firma Vernier vertreibt eine Messapparatur zur Bestimmung von Zentripetalkräften in Funktion der Winkelgeschwindigkeit im Physik-Unterricht der Sekundarstufe 2 (Figur 1):

Auf einem stabilen, grün eloxierten Aluminiumrahmen ist ein grosses Kugellager befestigt, in welchem eine rostfreie Stahlachse rotiert. Axial dazu ist eine kreisrunde Scheibe mit 10 Kodier-Schlitzen zur Messung des Rotationswinkels in Funktion der Zeit befestigt in $\Delta\varphi = 360°/10 = 36° -$, bzw. in $2 \cdot \pi/10 = \pi/5 - \text{Schritten}$.

Die Zeit Δt, welche die rotierende Achse für eine Drehung um $\Delta\varphi = 36°$ bzw. $\Delta\varphi = \pi/5$ benötigt, wird mit Hilfe einer Lichtschranke (Vernier VPG-BTD) zweimal (von aufsteigender zu aufsteigender sowie von absteigender zu absteigender Flanke des elektrischen Schranken-Signals) gemessen. Auf der Achse ist ein drehbarer Balken befestigt, auf dem sich ein auf Kugellagern gleitender Wagen mit bis zu 3 Testmassen und ein gleich grosses, festes Ausgleichsgewicht befinden. Am Gleit-wagen ist ein Faden befestigt, der über zwei Umlenkrollen mit einem Kraftsensor (Vernier DFS-BTA) verbunden ist. Ein Verdreh-Schutz mit Kugellager verhindert, dass der Faden aufgewickelt wird, wenn der Balken rotiert. Als Starthilfsmittel und für Experimente mit äusseren Drehmomenten befindet sich auf der Achse oberhalb der Winkel-Kodier-Scheibe zusätzlich eine dreistufige Scheibe.



Figur 2 Stufenscheibe

Wickelt man um eine dieser drei Scheiben (Radius $\vec{r}'$) einen Faden und übt eine Kraft $\vec{F}$ aus, so wirkt auf das rotierende System des Drehbalkens ein äusseres Drehmoment $\vec{M} = \vec{r}' \times \vec{F}$.

2. Messung der Zentripetalkraft in Funktion der Winkelgeschwindigkeit

Für den Betrag a_Z der Zentripetal-(Radial-) Beschleunigung gilt:

$$a_Z = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r$$

(r Bahnradius des kreisenden Massepunkts m, v Geschwindigkeit, ω Winkelgeschwindigkeit, t Zeit, φ Winkel). Für den Betrag F_Z der so genannten Zentripetalkraft (Radialkraft) erhält man damit:

$$F_Z(\omega) = m \cdot \omega^2 \cdot r \qquad \text{oder} \qquad F_Z/\omega^2 = m \cdot r$$

Zu Beginn wird der Drehbalken mithilfe eines Gewichts an einem Faden, der über eine Hilfsrolle mit der Stufenscheibe verbunden ist, in Rotation versetzt (Figur 3). Dann werden die Zeiten pro Winkelinkrement von 30° in zwei Serien (s.o.) sowie die Zugkraft des rotierenden Wagens gemessen. Diese Zugkraft hat denselben Betrag wie die Zentripetalkraft F_Z. Die Bewegung des Balkens wird durch Reibungseffekte verzögert. Gemessen wird bis zum Stillstand des Balkens. Auf diese Weise kann die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi}{5 \cdot \Delta t}$$

Die Funktion $F_Z = F_Z(\omega)$ der Zentripetalkraft kann in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit *während eines einzigen* Messprozesses mit der TI-nspire-Software direkt gemessen werden. Dies ist der grosse Vorteil dieser Apparatur.

Beginn der Messung: Start Collection

Ende der Messung: Stop Collection

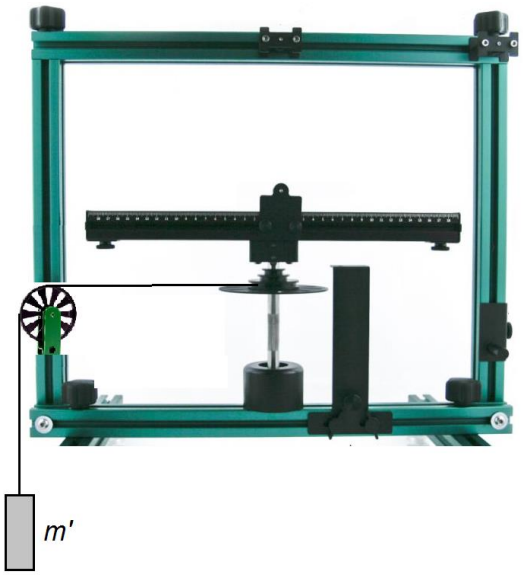
Einstellung der beiden Sensoren:

- Dual Range Force-Sensor DFS-BTA (10 Newton): Calibrate 0 Volt, wenn der Sensor nur mit dem Gewicht des Verdrehschutzes belastet wird.
- Photogate VPG-BTD: Collection Mode => Photogate Timing => Mode: Gate => Length of Object (meters) : irgend einen Wert eingeben, z.B. 0.050 (irrelevant),
  End of Data Collection: On Stop,
  Number of Events : 2000

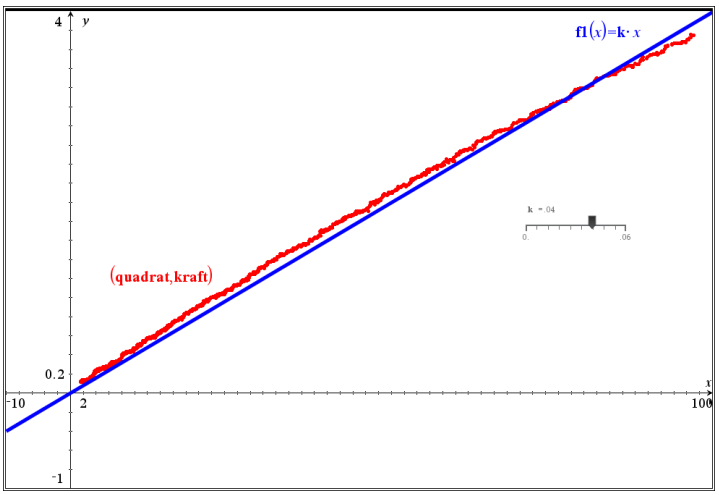
Stellt man F_Z in Funktion von ω^2 so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung $F_Z/\omega^2 = m \cdot r$.
Figur 4 zeigt eine solche Messung für *m* = 0.256 kg und *r* = 0.151 m. Dargestellt sind ca. 1300 Messpunkte (rot) sowie eine Gerade mit der Steigung

$$F_Z/\omega^2 = m \cdot r = 0.256\ \mathrm{kg} \cdot 0.151\ \mathrm{m} = 0.0399\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \quad \text{(Schieberegler).}$$

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Theorie ist erstaunlich gut.



Figur 3 Startvorrichtung



Figur 4 Zentripetalkraft $F_Z = F_Z(\omega^2)$

```
Define join(l1,l2)=
Func
If getType(l1)≠"LIST" Then
   l1:={l1}
 EndIf
 If getType(l2)≠"LIST" Then
   l2:={l2}
 EndIf
 Return augment(l1,l2)
EndFunc
```

Figur 5 Einfügen von Elementen in eine Liste

```
Define omega_quadr(liste)=
Func
 Local hilfsliste,k,ende
 ende:=count(liste)
 hilfsliste:={_,_}
 For k,3,ende
    hilfsliste:=join(hilfsliste,(π/(5·(liste[k]−liste[k−2])))^2)
 EndFor
 Return hilfsliste
EndFunc
```

Figur 6 Erstellen einer Liste mit ω^2-Werten

Für den Einsatz im Unterricht empfiehlt es sich den Messprozess soweit zu automatisieren, dass möglichst wenige Rechnermanipulationen zur Darstellung des Resultat-Graphen $F_Z = F_Z\left(\omega^2\right)$ (Figur 4) erforderlich sind. Dazu sind die in Figuren 5 und 6 dargestellten Funktionen zum Erstellen einer Liste und zur Berechnung von ω^2-Werten nützlich.

3. Dynamische Messung von Trägheitsmomenten

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments J des Drehbalkens (Masse $m_D = 320\ \mathrm{g}$, Länge $\ell = 38.5\ \mathrm{cm}$) mit zusätzlichen Gewichten kann die in Figur 3 gezeigte Anordnung verwendet werden. Es wurden 4 Messungen mit leerem Gleitwagen ($m = 56\ \mathrm{g}$) und Ausgleichsgewicht sowie mit je 1 oder 2 Zusatzgewichten zu 100 g ($m = 156\ \mathrm{g}$ bzw. $256\ \mathrm{g}$) in einem Abstand $r = 15.6\ \mathrm{cm}$ von der Drehachse durchgeführt. Damit kann das Trägheitsmoment für die drei Fälle statisch grob abgeschätzt werden:

$$J \approx \frac{1}{12} \cdot m_D \cdot \ell^2 + 2 \cdot m \cdot r^2 = \begin{cases} 0.0067\ \mathrm{kg \cdot m^2} \\ 0.0115\ \mathrm{kg \cdot m^2} \\ 0.0164\ \mathrm{kg \cdot m^2} \end{cases}$$

Der beschleunigende Gewichtskörper hat eine Masse von $m' = 200\ \mathrm{g}$, der Radius der Stufenscheibe beträgt $r' = 2.5\ \mathrm{cm}$.